SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

L. CATTABRIGA

ALCUNI RISULTATI DI PROPAGAZIONE DI REGOLARITA' PER SOLUZIONI DI EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI CON COEFFICIENTI COSTANTI

9-16 DICEMBRE 1982

Nell'esposizione che segue sono trattati alcuni aspetti del seguente problema.

Sia $P(D)$, $D = (D_1,\dots,D_n)$, $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$, un polinomio differenziale su R^n e siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ aperti di R^n. Si vogliono fornire condizioni sufficienti, e possibilmente necessarie e sufficienti, affinché per un aperto $A \subset \Omega_2$ valga uno dei seguenti risultati:

$$\text{(I)}\quad u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ u \in C^\infty(\Omega_1),\ P(D)u \in C^\infty(\Omega_2) \Rightarrow u \in C^\infty(A),$$

oppure, per un dato $\sigma \geqq 1$,

$$\text{(II)}\quad u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_1),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_2) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(A),$$

od infine più generalmente che per un assegnato $\rho > \sigma$

$$\text{(III)}\quad u \in \gamma_0^{(\rho)'}(\Omega),\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_1),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_2) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(A).$$

Qui $\gamma_0(\rho)'(\Omega)$, $\rho > 1$, indica lo spazio di ultradistribuzioni duale dello spazio di Beurling $\gamma_0^{(\rho)}(\Omega)$ e $\Gamma^{(\sigma)}(\Omega)$ lo spazio di Gevrey di esponente $\sigma \geqq 1$. Per le notazioni e le principali proprietà di questi spazi rimandiamo al Seminario [C3] tenuto qui lo scorso anno accademico ed alla letteratura in proposito ivi indicata. Ricordiamo che con sing supp u, $\text{sing supp}_\sigma u$ indichiamo l'intersezione di tutti i chiusi (relativamente ad un aperto Ω) al di fuori dei quali u è C^∞ o, rispettivamente, appartiene a $\Gamma^{(\sigma)}$.

1. E' noto che se $\Omega_1 = \emptyset$ (I) e (II) valgono qualunque siano $\Omega \subset R^n$ ed $A = \Omega_2 \subset \Omega$ se e soltanto se P è ipoellittico, rispettivamente σ-ipoellittico. Un altro caso in cui vale (I) qualunque sia P con $A = \Omega_2$ è quello in cui $\Omega_1 = \Omega \setminus K$, K compatto contenuto in Ω, ed $\Omega_2 = \Omega$. Tale proprietà è conseguenza del fatto che se $u \in \mathcal{E}'$ l'inviluppo convesso di sing supp $P(D)u$ e di sing supp u coincidono. Un altro caso particolare di (I) è fornito dal seguente teorema che, secondo la formulazione di [H1] si può enunciare così:

1.1. Teorema. Sia H un semispazio aperto di R^n e K un compatto contenuto nella chiusura di H. Allora qualunque sia P

$$u \in \mathcal{D}'(H),\ u \in C^\infty(H\setminus K),\ P(D)u \in C^\infty(H) \Rightarrow u \in C^\infty(H).$$

Di questo risultato di tipo (I) e del precedente, J. Boman ha dato in [B1] una versione in cui lo spazio C^∞ è sostituito da spazi di funzioni indefinitamente differenziabili dei quali lo spazio $\Gamma^{(\sigma)}$ è caso particolare. Egli prova dunque in particolare le seguenti proprietà di tipo (II):

1.2. Teorema [B1] . Sia Ω un aperto di R^n, K un compatto contenuto in Ω e $\sigma \geqq 1$. Allora qualunque sia P

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega \setminus K),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega).$$

1.3. Teorema [B1] . Sia Ω un aperto di R^n, d un numero reale, K un compatto di Ω e $\sigma \geqq 1$. Allora qualunque sia P

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_d \setminus K),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_d) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega_d),$$

ove $\Omega_d = \{x \in \Omega;\ x_n > d\}$.

Per dare una dimostrazione di questo risultato anche quando nello spazio di funzioni indefinitamente differenziabili che si considera non esistano funzioni non identicamente nulle a supporto compatto, come accade in $\Gamma^{(1)}$, Boman, utilizzando una idea di Ehrenpreis, costruisce una successione di funzioni $\chi_\nu \in C_0^\infty$, in seguito rivelatasi assai utile in problemi di questo tipo.

Si sceglie una funzione $\phi \in C_0^\infty$ con supp $\phi \subset \{x \in R^n; |x| < 1/4\}$ e tale che $\phi \geqq 0$, $\int \phi\, dx = 1$ e si pone

$$c_\alpha = \int |D^\alpha \phi|\, dx \quad , \quad c = \max_{|\alpha|=1} c_\alpha .$$

Se K è un compatto di R^n, sia ψ la funzione caratteristica dell'insieme dei punti a distanza minore di $r/2$ da K, $r > 0$, e per ogni intero positivo ν si definisca

$$(1.1) \qquad \chi_\nu = \psi * \phi_r * \phi_{r/\nu} * \ldots * \phi_{r/\nu}$$

ove nella convoluzione vi sono ν fattori eguali a $\phi_{r/\nu}$ e si è posto $\phi_a(x) = a^{-n}\phi(x/a)$. Le funzioni χ_ν hanno le proprietà descritte dal seguente lemma

1.4. Lemma [H3] . Sia K un compatto di R^n ed $r > 0$. Allora per ogni intero positivo ν la funzione χ_ν definita da (1.1) appartiene a C_0^∞, è uguale ad uno su K e a zero in tutti i punti con distanza $> r$ da K e

$$(1.2) \qquad |D^{\alpha+\beta} \chi_\nu(x)| \leq c_\alpha r^{-|\alpha|} (c\, \nu/_r)^{|\beta|} \quad \text{con } \alpha, \beta \in Z_+^n, \ |\beta| \leqq \nu.$$

Da questo lemma, quando si scelga $\alpha = 0$ in (1.2), segue che

1.5. Corollario. Sia Ω un aperto di R^n e si scelgano il compatto K ed $r > 0$ nel Lemma 1.3 in modo che per ogni ν, $\chi_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$. Allora se $u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega)$, $\sigma \geq 1$, per ogni aperto Ω' a chiusura compatta contenuta in Ω esiste una costante positiva $c(\Omega')$ tale che per ogni intero positivo ν

$$(1.3) \qquad |D^\beta(\chi_\nu u)(x)| \leq c(\Omega')^\nu\, \Gamma(\sigma\nu + 1),\ x \in \overline{\Omega'},\ |\beta| \leq \nu,$$

ove Γ indica la funzione di Eulero.

1.6. Osservazione. Se la funzione ϕ a partire dalla quale si costruiscono secondo (1.1) le funzioni χ_ν, anziché in C_0^∞ si sceglie in $\gamma_0^{(\rho)}$, allora anche le funzioni χ_ν appartengono a $\gamma_0^{(\rho)}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c(\varepsilon) > 0$ tale che in luogo di (1.2) si ha

$$(1.2) \qquad |D^{\alpha+\beta}\chi_\nu(x)| \leq c(\varepsilon)\, \varepsilon^{|\alpha|}\Gamma(\rho|\alpha|+1)r^{-|\alpha|}(c\,\nu/_r)^{|\beta|},\ \alpha,\beta \in Z_+^n, |\beta| \leq \nu.$$

In tal caso, se $u \in \Gamma^{(\sigma)}(\Omega)$, $\sigma \geq 1$, e $\operatorname{supp} \chi_\nu \subset \Omega$ per ogni ν, allora per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono delle costanti $c(\Omega')$, indipendente da ε e ν, e $c(\varepsilon,\Omega')$ indipendente da ν, tali che

$$(1.3) \qquad \| D^\beta(\chi_\nu u)\|_{\varepsilon,\bar{\Omega}'} \leq c(\varepsilon,\Omega')\, c(\Omega')^{|\beta|+1}\nu^{\sigma|\beta|},\ \beta \in Z_+^n, |\beta| \leq \nu$$

dove $\| f \|_{\varepsilon,\Omega'} = \sup\limits_{x\in\Omega'} \sup\limits_{\alpha\in Z_+^n} \varepsilon^{-|\alpha|}\Gamma(\rho|\alpha|+1)^{-1}\, |D^\alpha f(x)|$ è una seminorma in $\gamma^{(\rho)}(\Omega)$.

2. I teoremi enunciati nel numero precedente forniscono risultati del tipo di (I) e (II), validi per ogni polinomio P, ma richiedono che sing supp u, rispettivamente sing supp_σ u siano limitati. L'esempio dei polinomi ipoellittici mostra che è possibile liberarsi di questa restrizione, ove si considerino particolari tipi di polinomi. Un ampio ed approfondito studio di condizioni necessarie e sufficienti al verificarsi di proprietà di tipo (I) è stato fatto da L. Hörmander in [H2], [H4] ed [H5]. Noi ci limitiamo qui a considerare alcuni risultati per i quali valgono analoghe proprietà del tipo (II) e (III).

Un primo risultato che vogliamo richiamare risale essenzialmente a V.V. Grušin [G1] e riguarda i *polinomi di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali*. Ricordiamo che un polinomio differenziale $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha$ su R^n si dice di tipo principale se tutti i suoi vettori caratteristici sono semplici, ossia se indicata con $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \xi^\alpha$ la sua parte principale, è grad $P_m(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ tale che $P_m(\xi) = 0$. Se P_m ha coefficienti reali, $x^0 \in R^n$, $\xi^0 \in R^n \setminus \{0\}$ e $P_m(\xi^0) = 0$, la retta

$$x = x^0 + t \,\text{grad}\, P_m(\xi^0) \quad , \quad t \in R$$

si dice una linea bicaratteristica di P per x^0. Vale il seguente risultato

<u>2.1. Teorema</u> [G1] . Sia P di tipo principale e con parte principale P_m a coefficienti reali, Ω un aperto di R^n e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $P(D)\, u \in C^\infty(\Omega)$. Se $x^0 \in \Omega$ e su ogni linea bicaratteristica ℓ di P per x^0 esiste $y_\ell \notin$ sing supp u, tale che il segmento $[x^0, y_\ell] \subset \Omega$, allora $x^0 \notin$ sing supp u.

Questo risultato equivale ad affermare che se $x^0 \in$ sing supp u, allora per almeno una linea bicaratteristica ℓ di P per x^0, la componente di $\ell \cap \Omega$ che contiene x^0 è contenuta in sing supp u.

Per gli stessi operatori si prova inoltre un'altra proprietà delle linee bicaratteristiche e cioè che

<u>2.2. Teorema</u> [Z1] . Se P è di tipo principale e di ordine m, con parte principale a coefficienti reali ed ℓ è una linea bicaratteristica di P, allora esiste una soluzione $u \in C^m(R^n)$ dell'equazione $P(D)u = 0$ con sing supp $u = \ell$.

Questo teorema ed il Teorema 2.1 consentono di provare un risultato del tipo di (I) per questo tipo di operatori.

<u>2.3. Teorema</u> [H2]. Sia P di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali e siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ aperti di R^n. Allora per un aperto $A \subset \Omega_2$ vale la proprietà (I) *se e soltanto se* per ogni linea bicaratteristica ℓ di P, ogni componente di $\ell \cap \Omega_2$ che interseca A interseca anche Ω_1.

La parte necessaria di questo teorema si prova utilizzando il Teorema 2.2; la parte sufficiente fondandosi sul Teorema 2.1. Questo, a sua volta, può essere provato come conseguenza dell'esistenza di opportune soluzioni fondamentali per il polinomio P(D):

<u>2.4. Teorema</u> [H2][1]. Sia P di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali e sia F un chiuso di R^n contenente una metà di ciascuna linea bicaratteristica di P per l'origine. Allora esiste una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(R^n)$ di P(D) con sing supp $E \subset F$.

Il Teorema 2.4 è ottenuto da L. Hörmander come conseguenza di un risultato più generale in cui, per studiare il supporto singolare di una soluzione fondamentale di un polinomio differenziale P, si utilizza l'insieme L(P) delle sue *localizzazioni all'infinito*, ossia l'insieme

---

1) Si veda anche [G1].

dei polinomi $\xi \to Q(\xi)$ tale che per una successione

$$\eta_\nu \to \infty, \quad P(\xi + \eta_\nu)/\tilde{P}(\eta_\nu) \to Q(\xi),$$

ove $\tilde{P}(\eta) = (\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\eta)|^2)^{1/2}$. Per ognuno di tali Q si pone

$$\Lambda(Q) = \{\xi \in R^n;\ Q(\eta + t\xi) = Q(\eta)\ \forall\, t, \eta\}$$

e

$$\Lambda'(Q) = \{x \in R^n;\ \langle x, \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \Lambda(Q)\}\ . \tag{2.1}$$

Si vede subito che P è ipoellittico se e soltanto se tutte le sue localizzazioni sono delle costanti e quindi per ognuna di esse $\Lambda'(Q) = \{0\}$. E'pure facile provare che l'insieme $\{\Lambda'(Q),\ Q \in L(P)\}$ è l'insieme delle linee bicaratteristiche di P per l'origine se P è di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali, e l'insieme delle linee caratteristiche [2] per l'origine se P è un polinomio omogeneo in due variabili. Per questi ultimi polinomi vale un risultato come quello del Teorema 2.4 con F sostituito da un chiuso di R^n contenente una metà di ciascuna linea caratteristica di P per l'origine e quindi, con la stessa sostituzione, un teorema come il Teorema 2.1 [3]. Ne segue allora

<u>2.5 Teorema</u>. Sia P un polinomio omogeneo in due variabili e siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ aperti di R^2. Allora la proprietà (I) vale per ogni aperto $A \subset \Omega_2$ tale che per ogni linea caratteristica ℓ di P, ogni componente di $\ell \cap \Omega_2$ che interseca A interseca anche Ω_1.

Ancora utilizzando le localizzazioni di P all'infinito, in

---

2) Ossia della rette ortogonali ai vettori caratteristici di P.

3) Si veda anche il Teorema 5.1 di [H2].

[H2] è provato il seguente Teorema [4)]

2.6 Teorema [H2]. Sia P un polinomio su R^n ed $H_N = \{x \in R^n;$ $\langle x, N \rangle \geqq 0\}$, $N \in R^n \backslash \{0\}$. Se esiste un cono Δ[5)] aperto e convesso contenente N ed una costante $c_1 > 0$ tale che

$$(2.2) \qquad \zeta \in \mathbf{C}^n,\ P(\zeta) = 0,\ \mathrm{Im}\,\zeta \in -c_1 N - \Delta,\ \zeta \to \infty \Rightarrow \mathrm{Im}\,\zeta \to \infty,$$

allora esiste una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(R^n)$ tale che

$$\text{sing supp } E \subset \Delta' = \{x \in R^n;\ \langle x, \xi \rangle \geqq 0, \xi \in \Delta\}.$$

Si noti che Δ' è un cono chiuso, convesso, proprio (cioè non contenente alcuna retta), contenuto in H_N e contenente N e tale che $\Delta' \cap \partial H_N = \{0\}$.

D'altra parte, come in Hörmander [H2] , si prova facilmente che

2.7 Teorema. Sia P un polinomio avente una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(R^n)$ con sing supp E contenuto in un cono proprio chiuso e convesso W (con vertice l'origine) e sia $N \in R^n \backslash \{0\}$ tale che $W \subset H_N = \{x \in R^n;\ \langle x,N \rangle \geqq 0\}$ e $W \cap \partial H_N = \{0\}$. Allora vale la proprietà (I) con $\Omega = \Omega_2 = A = R^n$, Ω_1 = il complementare $\complement H_N$ di H_N :

$$u \in \mathcal{D}'(R^n),\ u \in C^\infty(\complement H_N),\ P(D)u \in C^\infty(R^n) \Rightarrow u \in C^\infty(R^n).$$

Si noti che esistono polinomi per i quali vale la conclusione di questo teorema, ma che non soddisfano a (2.2)[6)]. Quest'ultima è inve-

---

4) Per questo teorema e per il Teorema 2.7 si veda anche [S1].

5) Ossia un sottoinsieme di R^n tale che $y \in \Delta \Rightarrow \lambda y \in \Delta\ \forall \lambda \geqq 0$.

6) Per esempio se $n = 3$, $N = (0,01)$, $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_3^2$.

ce soddisfatta da tutti i polinomi che sono prodotti di un polinomio i-perbolico rispetto ad N e di un polinomio ipoellittico [7].

2.8 Cenno alla dimostrazione del Teorema 2.7. Sia $\phi \in C_0^\infty(R^n)$ e $\phi \equiv 1$ in un intorno dell'origine. E' $P(D)(\phi E) = \delta - f$, con $f = -\sum_{\alpha \neq 0} P^{(\alpha)}(D)E\, D^\alpha\phi/\alpha!$. E' $f \in \mathscr{E}'$ e per un $t > 0$, sing supp $f \subset \{x;\ \langle x,N\rangle \geq t\}$. E' possibile quindi scrivere $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in C_0^\infty(R^n)$ ed $f_2 \in \mathscr{E}'$ con supp $f_2 \subset \{x;\ \langle x,N\rangle \geq t/2\}$. Se quindi u soddisfa alle ipotesi indicate è

$$P(D)u * (\phi E) = u * P(D)(\phi E) = u - u * f_1 - u * f_2$$

e quindi

$$u - u * f_2 \in C^\infty(R^n).$$

D'altra parte, dall'ipotesi che sia $u \in C^\infty(\{x;\ \langle x,N\rangle < 0\})$, segue che $u * f_2 \in C^\infty(\{x;\ \langle x,N\rangle < t/2\})$, onde $u \in C^\infty(\{x;\ \langle x,N\rangle < t/2\})$. Iterando questo ragionamento si conclude che $u \in C^\infty(R^n)$.

Da questo teorema si trae subito il seguente corollario

2.9 Corollario. Se P soddisfa alle ipotesi del Teorema 2.7 e V è un cono chiuso tale che $V \setminus \{0\} \subset C(-W)$, esiste un numero finito di vettori $N^j \in W' \setminus \{0\}$ e di numeri $d_j > 1$, $j = 1,\dots \ell$, tali che

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j,\quad \Delta_j = \{y \in R^n;\ |y| \leq d_j \langle y, N^j\rangle\},$$

e per ogni $j = 1,\dots \ell$

---

7) Di più, questi polinomi soddisfano anche alla condizione che si ottiene sostituendo nella (2.2) N con -N e Δ con $-\Delta$.

$$u \in \mathcal{D}'(R^n),\ u \in C^\infty(C\Delta_j),\ P(D)u \in C^\infty(R^n) \Rightarrow u \in C^\infty(R^n).$$

Il Teorema 2.1 è stato esteso da L. Hörmander [H4], utilizzando le localizzazioni all'infinito di un polinomio P.

2.10 Definizione [H4]. Si dicono *spazi bicaratteristici per l'origine di un polinomio* P i sottospazi di R^n che sono limiti di una successione di sottospazi $\Lambda'(Q_j)$, $Q_j \in L(P)$, definiti da (2.1), rispetto alla metrica

$$d(V,W) = \sup_{\substack{x\in V\\ |x|=1}} \ \inf_{\substack{y\in W\\ |y|=1}} |x-y| \ , \quad V,\ W \text{ sottospazi di } R^n.$$

Con B_x, $x \in R^n$, si indica l'insieme degli spazi bicaratteristici di P per x.

2.11 Teorema [H4]. Sia P tale che

$$P^{(\alpha)}(\eta)/\tilde{P}(\eta) \to 0 \quad \text{per } \eta \to \infty\ ,\ |\alpha| > 1. \tag{2.3}$$

Siano poi $\Omega_1 \subset \Omega$ aperti di R^n ed $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $u \in C^\infty(\Omega_1)$, $P(D)\,u \in C^\infty(\Omega)$. Se $x^0 \in \Omega$ e per ogni $b \in B_{x^0}$ la componente di $b \cap \Omega$ contenente x^0 incontra Ω_1, allora $x^0 \notin \text{sing supp } u$.

Altrimenti detto: nelle ipotesi del Teorema 2.11 su P ed u, se A è un aperto $\subset \Omega$ tale che per ogni spazio bicaratteristico b di P ogni componente di $b \cap \Omega$ che incontra A incontra pure Ω_1, allora vale la (I) con $\Omega_2 = \Omega$, ossia

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ u \in C^\infty(\Omega_1),\ P(D)\,u \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(A).$$

Si noti che alla (2.3) soddisfano tutti i polinomi di tipo principale, tutti i polinomi ipoellittici, ed i polinomi prodotti di polinomi di questi tipi . Si noti anche che P soddisfa alla (2.3) se e soltanto se tutte le sue localizzazioni all'infinito sono polinomi di ordine $\leqq 1$. Ne segue che per ogni $Q \in L(P)$ gli spazi $\Lambda'(Q)$ definiti da (2.1) hanno dimensione $\leqq 2$ se P è a coefficienti complessi e $\leqq 1$ se P ha coefficienti reali.

2.12 Osservazione. I Teoremi 2.5 e 2.11 provano anche che per i polinomi omogenei in due variabili e per quelli che soddisfano a (2.3) vale la proprietà (I) con $\Omega = \Omega_2 = A = R^n$ e $\Omega_1 = \complement V$, V un qualunque cono *proprio* chiuso e convesso, ossia che per tali V

$$u \in \mathcal{D}'(R^n),\ u \in C^\infty(\complement V),\ P(D)\, u \in C^\infty(R^n) \Rightarrow u \in C^\infty(R^n)\,.$$

3. Una proprietà del tipo della (II), con $\sigma = 1$, è stata provata da K.G. Andersson [A1] per i polinomi P di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali. Questo risultato, del tutto analogo al Teorema 2.3 è ottenuto dopo aver costruito una soluzione fondamentale di P con supporto singolare analitico contenuto in certi insiemi, connessi con opportune localizzazioni di P. Tale costruzione è effettivamente eseguita nel caso in cui P sia più debole della sua parte principale e questa sia localmente iperbolica [8], ciò che si verifica quando P è di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali. La costruzione utilizza una opportuna partizione dell'unità sullo spazio duale di R^n, mediante funzioni del tipo delle funzioni χ_ν definite da (1.1).

3.1 Teorema [A1]. Sia P di tipo principale e con parte principale a coefficienti reali e siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ aperti di R^n. Allora per un

[8] Si veda in 4.9 la definizione di polinomio omogeneo localmente iperbolico.

aperto $A \subset \Omega_2$ vale la proprietà (II) con $\sigma = 1$, se e soltanto se per ogni linea bicaratteristica ℓ di P, ogni componente di $\ell \cap \Omega_2$ che interseca A interseca anche Ω_1.

Si può provare una proprietà del tipo (II) analoga a quella del Teorema 2.7, imponendo a P una condizione più forte della (2.2). Per mostrare questo risultato anche nel caso in cui sia $\sigma = 1$, si segue la dimostrazione del Teorema 2.7 utilizzando una opportuna soluzione fondamentale di P costruita in [M1] e le funzioni χ_ν definite da (1.1). Valgono i seguenti teoremi analoghi ai Teoremi 2.6 e 2.7 rispettivamente.

3.2 <u>Teorema</u> [M1]. Sia P un polinomio su R^n ed esistano un cono proprio aperto e convesso Δ, due numeri $k > 1$ e $\sigma \geqq 1$ e due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$\xi \in R^n,\ \tau \in R,\ |\xi| > k,\ \eta \in \Delta\ ,\ |\eta| = 1,\ P(\xi + i\tau\eta) = 0 \Rightarrow$$

$$\tau \geqq -c_1 \quad \text{oppure } \tau \leqq -c_2|\xi|^{1/\sigma}.$$

Allora esiste una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(R^n)$ di P con sing $\mathrm{supp}_\sigma E \subset \Delta' = \{x \in R^n;\ \langle x,\eta\rangle \geqq 0\ \ \forall \eta \in \Delta\}$.

3.3. <u>Teorema</u>. Sia $\sigma \geqq 1$ e P un polinomio avente una soluzione fondamentale $E \in \mathcal{D}'(R^n)$ con sing $\mathrm{supp}_\sigma E$ contenuto in un cono chiuso convesso e proprio W e sia $N \in R^n \setminus \{0\}$ tale che $W \subset H_N$ e $W \cap \partial H_N = \{0\}$. Allora vale la proprietà (II) con $\Omega = \Omega_2 = A = R^n$, $\Omega_1 = CH_N$, ossia

$$u \in \mathcal{D}'(R^n),\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(CH_N),\ P(D)\, u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n).$$

<u>Dimostrazione</u>. Per semplicità sia $N = (0,\dots 0,1)$ e sia χ_ν la funzione definita da (1,1) quando K è la sfera di centro l'origine e rag

gio 1 ed r = 1. Posto, analogamente a quanto fatto in 2.8, $f_\nu = - \sum_{\alpha\neq 0} P^{(\alpha)}(D)E\, D^\alpha \chi_\nu/\alpha!$, sia $\psi_\nu(x_n)$ la funzione definita su R da (1.1) quando K è l'intervallo $[-2,t/2]$ ed $r = t/4$, con t come in 2.8. Siano $f_{1\nu} = \psi_\nu f_\nu$ ed $f_{2\nu} = (1-\psi_\nu)f_\nu$ onde

$$u - u * f_{2\nu} = P(D)u * \chi_\nu E + u * f_{1\nu}.$$

E' $f_{1\nu} \in C_0^\infty$, $f_{2\nu} \in \mathscr{E}'$ con supp $f_{2\nu} \subset \{x; x_n \geq t/2\}$ e, tenuto conto del Corollario 1.4, $|D^\beta f_{1\nu}(x)| \leq c^\nu\, \Gamma(\sigma\nu+1)$ se $|\beta| \leq \nu$, con c indipendente da ν. Se ora u soddisfa alle ipotesi indicate, è $P(D)u*(\chi_\nu E) \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n)$ uniformemente rispetto a ν e se $|\beta| \leq \nu$, $\sup_{x\in\Omega} |D^\beta(u*f_{1\nu})(x)| \leq c^\nu\, \Gamma(\sigma\nu+1)$, qualunque sia l'aperto limitato Ω e

$$\text{(3.1)} \quad \sup_{x\in\Omega'} |D^\beta(u*f_{2\nu})(x)| \leq c(\Omega')^\nu\, \Gamma(\sigma\nu+1), \text{ se } \Omega' \subset\subset \{x \in R^n;\ x_n < t/2\}.$$

Ne segue che anche u soddisfa alla (3.1). Iterando questo procedimento si prova così che

$$\sup_{x\in\Omega'} |D^\beta u)(x)| \leq c(\Omega')^\nu\, \Gamma(\sigma\nu+1), \qquad |\beta| \leq \nu,$$

qualunque sia l'aperto limitato Ω'. Poiché ν è un qualunque numero naturale, ciò prova il teorema.

Questo teorema consente evidentemente di affermare che *vale il Corollario 2.9 con* $\Gamma^{(\sigma)}$, $\sigma \geq 1$, *in luogo di* C^∞.

Un caso particolare di polinomi soddisfacenti alla ipotesi del Teorema 3.3 è quello dei polinomi iperbolico-ellittici definiti da J. Fehrman.

<u>3.4 Definizione</u> [F1]. Un polinomio P su R^n si dice *iperbolico-ellittico rispetto al vettore* $N \in R^n \setminus \{0\}$ se N non è caratteristico per P ed esistono due costanti positive c_1, c_2 tali che

$$\xi \in R^n,\ t \in R,\ P(\xi + itN) = 0 \quad \Rightarrow t \geq -c_1 \text{ oppure } t \leq -c_2\ |\xi|.$$

In [F1] è provato che se P è iperbolico-ellittico rispetto ad N, allora lo è pure rispetto a tutti gli η appartenenti ad un cono aperto Δ contenente N od al suo opposto. P ha in tal caso una soluzione fondamentale analitica fuori di un cono chiuso W il cui inviluppo convesso è il cono proprio chiuso e convesso duale di Δ, ed un'altra soluzione fondamentale analitica fuori del cono -W. Il cono W si dice *superficie del fronte d'onda di* P.

Tenuto conto che $W \cap (-W) = \{0\}$, dal Corollario 2.9 con $\Gamma^{(1)} = A$ in luogo di C^∞, segue che

<u>3.5 Corollario</u>. Sia Δ un cono aperto e P un polinomio iperbolico-ellittico rispetto ai vettori appartenenti a $\Delta \cup (-\Delta)$. Allora esiste un numero finito di vettori $N^j \in (\bar{\Delta} \cup (-\bar{\Delta})) \setminus \{0\}$ e di numeri $d_j > 1$, $j = 1,\dots,\ell$ tali che

$$R^n = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j \ , \ \Delta_j = \{y \in R^n;\ |y| \leq d_j \langle y, N^j \rangle\}$$

e per ogni $j = 1,\dots,\ell$

$$u \in \mathcal{D}'(R^n),\ u \in A(\complement\Delta_j), P(D)u \in A(R^n) \ \Rightarrow u \in A(R^n).$$

4. Passiamo ad indicare alcuni casi in cui vale una proprietà del tipo della (III). Per provare proprietà di questo tipo si possono utilizzare soluzioni fondamentali di P appartenenti al duale di uno spazio di Beurling delle quali si conosca il σ-supporto singolare e le funzioni χ_ν definite da (1.1) a partire da una $\phi\in\gamma_0^{(\rho)}$.

Procedendo come per la dimostrazione del Teorema 3.3, tenuto conto che $\Gamma^{(\sigma)}(R^n) \subset \gamma^{(\rho)}(R^n)$ se $\rho > \sigma$ e delle (1.3'), si prova anzitutto che

<u>4.1 Teorema</u>. Sia P un polinomio avente una soluzione fondamentale $E \in \gamma_0^{(\rho)'}(R^n)$ con sing $\mathrm{supp}_\sigma E \subset W$, ove $\rho > \sigma \geqq 1$ e W è un cono chiuso proprio e convesso. Sia poi $N \in R^n\setminus\{0\}$ tale che $W\subset H_N=\{x \in R^n; \langle x, N\rangle \geqq 0\}$ e $W \cap \partial H_N = \{0\}$. Allora vale la proprietà (III) con $\Omega = \Omega_2 = A = R^n$ ed $\Omega_1 = \complement H_N$, ossia

$$u \in \gamma_0^{(\rho)'}(R^n),\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(\complement H_N),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n) \Rightarrow u\in \Gamma^{(\sigma)}(R^n).$$

<u>4.2 Corollario</u>. Se P soddisfa alle ipotesi del Teorema 4.1 e V è un cono chiuso tale che $V\setminus\{0\} \subset \complement(-W)$, esiste un numero finito di vettori $N^j \in W'\setminus\{0\}$ e di numeri $d_j > 1$, $j = 1,\dots,\ell$, tali che

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j \quad , \quad \Delta_j = \{y \in R^n,\ |y| \leq d_j\langle y, N^j\rangle\},$$

e per ogni $j = 1,\dots,\ell$

$$u \in \gamma_0^{(\rho)'}(R^n),\ u \in\Gamma^{(\sigma)}(\complement\Delta_j),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n) \Rightarrow u\in \Gamma^{(\sigma)}(R^n).$$

Una condizione sufficiente affinché P soddisfi alle ipotesi del Teorema 4.1 è fornita dal seguente teorema che generalizza il Teorema 3.2

4.3 Teorema. Se per un dato polinomio P esistono un cono proprio, aperto e convesso Δ, dei numeri $k > 1$, $\rho > \sigma \geq 1$ e due costanti positive c_1, c_2 tali che

$$\xi \in R^n,\ \tau \in R,\ |\xi| > k,\ \eta \in \Delta,\ |\eta|=1\ P(\xi+i\tau\eta) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\tau \geq -c_1\ |\xi-\langle\xi,\eta\rangle\eta|^{1/\rho} \text{ oppure } \tau \leq -c_2\ |\xi|^{1/\sigma},$$

allora P ha una soluzione fondamentale $E \in \gamma_0^{(\rho)'}(R^n)$ con sing supp_σ $E \subset \Delta'$.

Alle ipotesi di questo teorema con $\rho = m/(m-1)$ soddisfano ad esempio tutti i polinomi prodotti di un polinomio σ-ipoellittico e di un polinomio di ordine m con parte principale iperbolica [9]. Il seguente risultato può essere considerato come un caso limite del Teorema 4.3.

4.4 Teorema [C1]. Sia $P(D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(D')D_n^j$, a_j polinomi in $D'=(D_1,\ldots,D_{n-1})$ di ordine $\leq M-j$ e sia $A_k = \{\xi \in R^{n-1};\ |\xi'|\leq k\} \cup \{\xi' \in R^{n-1};\ \sum_{j=0}^{m} |a_j(\xi')| = 0\}$. Se esistono $k > 1$, $\sigma \geq 1$, $\rho \in]\sigma, +\infty]$ e due costanti positive c_1 e c_2 tali che

$$(\xi',\lambda) \in (R^{n-1}\setminus A_k)\times \mathbf{C} \quad ,\ P(\xi'\lambda)=0 \ \Rightarrow$$

$$\mathrm{Im}\ \lambda \geq -c_1\ |\xi'|^{1/\rho} \quad \text{oppure} \quad \mathrm{Im}\ \lambda \leq -c_2(|\xi'|+|\mathrm{Re}\lambda|)^{1/\sigma},$$

allora P ha una soluzione fondamentale $E \in D'(R;\ \gamma_0^{(\rho)'}(R^{n-1}))$ con sing $\mathrm{supp}_\sigma E \subset H = \{x \in R^n;\ x_n \geq 0\}$ [10].

Per i polinomi soddisfacenti alle ipotesi del Teorema 4.4 e, più in generale, per quelli che hanno una soluzione fondamentale ultradistribuzione con σ-supporto singolare contenuto in un semispazio, vale la

---

9) Si veda [H1], Teorema 5.7.3. ed [L1].

10) Per $\rho = +\infty$ si intende $1/\rho = 0$ e $\gamma_0^{(\rho)'} = \mathcal{D}'$.

seguente proprietà di tipo (III).

4.5 Teorema. Se P ha una soluzione fondamentale $E \in \gamma_0^{(\rho)'}(R^n)$ con $\text{sing supp}_\sigma E \subset H_N = \{x \in R^n;\ \langle x,N\rangle \geq 0\}$, $N \in R^n \setminus \{0\}$, $\sigma \geq 1$, $\rho \in]\sigma,+\infty]$, allora qualunque sia il cono chiuso, proprio e convesso $V \subset H_N$ tale che $V \cap \partial H_N = \{0\}$[11] è

$$u \in \gamma_0^{(\rho)'}(R^n),\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(\complement V),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n).$$

Dimostrazione. Sia per semplicità $N = (0,\dots,0,1)$ e sia $\chi_\nu \in \gamma_0^{(\rho)}$ la funzione definita da (1.1) quando K è la sfera di centro l'origine e raggio r e $\phi \in \gamma_0^{(\rho)}$. E'

$$\chi_\nu u = E * P(D)(\chi_\nu u) = E * \chi_\nu P(D)u - E * f_\nu,$$

con $f_\nu = -\sum_{\alpha \neq 0} P^{(\alpha)}(D)u\, D^\alpha \chi_\nu / \alpha!$.

Dalle proprietà di V e di χ_ν e dal fatto che $u \in \Gamma^{(\sigma)}(\complement V) \subset \gamma^{(\rho)}(\complement V)$, segue che esiste $t \geq d^{-1}r$, $d \geq |N|^{-1}$, tale che $f_\nu \in \gamma^{(\rho)}(H_t)$, con $H_t = \{x \in R^n;\ x_n < t\}$. Sia ora $\psi_\nu \in \gamma_0^{(\rho)}$ la funzione definita su R da (1.1) con $K = [-2,t/2]$, $r = t/4$ e $\phi \in \gamma_0^{(\rho)}$ e siano $f_{1\nu} = \psi_\nu f_\nu$ ed $f_{2\nu} = (1-\psi_\nu)f_\nu$. E' $f_{1\nu} \in \gamma_0^{(\rho)}$, $\text{supp } f_{1\nu} \subset \{x \in R^n,\ r \leq |x| \leq 2r,\ x_n < t\}$ ed $f_{2\nu} \in \gamma^{(\rho)'}$, $\text{supp } f_{2\nu} \subset \{x \in R^n;\ x_n \geq t/2\}$, inoltre

$$\chi_\nu u + E * f_{2\nu} = E * \chi_\nu P(D)u - E * f_{1\nu} = v_\nu. \tag{4.1}$$

Le maggiorazioni (1.3') valgono con $\chi_\nu P(D)u$ ed $f_{1\nu}$ in luogo di $\chi_\nu u$ qua-

11) Si noti che queste condizioni implicano che per una costante $d \geq |N|^{-1}$ è $V \subset \{x \in R^n,\ |x| \leq d\langle x,N\rangle\}$.

lunque sia l'aperto limitato $\Omega' \subset R^n$. Valgono inoltre con E in luogo di $\chi_\nu u$ quando $\bar{\Omega}' \subset H_0 = \{x \in R^n, x_n < 0\}$. Pertanto per le derivate del secondo membro v_ν di (4.1) risulta

$$|D^\beta v_\nu(x)| \leq c(\Omega)^{|\beta|+1} \nu^{\sigma|\beta|} \quad , \quad x \in \Omega, \ |\beta| \leq \nu$$

per ogni aperto limitato Ω di R^n e inoltre

$$|D^\beta(\tilde{E} * f_{2\nu})(x)| \leq c(K)^{|\beta|+1} \ \Gamma\ (\sigma|\beta|+1), \ x \in K, \ \beta \in Z^n_+$$

per ogni compatto $K \subset H_{t/2}$, ove $c(\Omega)$ e $c(K)$ sono indipendenti da ν.

Da (4.1), notando che $\chi_\nu u = u$ quando $|x| \leq r$, segue allora che

$$|D^\beta u(x)| \leq c(K)^{|\beta|+1} \nu^{\sigma|\beta|}, \ x \in K \cap \{x \in R^n; \ |x| \leq r\}, \ |\beta| \leq \nu$$

per ogni $\nu \in Z_+$. Ciò mostra che $u \in \Gamma^{(\sigma)}(K \cap \{|x| \leq r\})$ e quindi, per la arbitrarietà di r che $u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n)$.

Per la sua analogia con un risultato provato in [C2] sull'esistenza di soluzioni in uno spazio di Gevrey, segnaliamo il seguente corollario dei Teoremi 4.4 e 4.5.

<u>4.6 Corollario</u>. Sia P un polinomio su R^n e sia $\sigma \geq 1$. Se esiste un numero finito di vettori $N^j \in R^n$, con $|N^j| = 1, j = 1, \ldots, \ell$, due numeri $\rho > \sigma$ e $k > 1$, e due costanti positive c_1 e c_2 tali che

a) $\forall y \in R^n \backslash \{0\}$ esiste $j \in \{1, .. \ell\}$, tale che $\langle y, N^j \rangle > 0$,

b) $\xi \in R^n$, $t \in R$, $|\xi - \langle \xi, N^j \rangle N^j| > k$, $P(\xi + itN^j) = 0 \Rightarrow$

$$t \geq -c_1 \ |\xi - \langle \xi, N^j \rangle N^j|^{1/\rho} \quad \text{oppure} \quad t \leq -c_2 |\xi|^{1/\sigma},$$

allora esistono delle costanti $d_j > 1$, $j = 1,\dots,\ell$, tali che

$$R^n = \bigcup_{j=1}^{\ell} \Delta_j, \quad \Delta_j = \{y \in R^n;\ |y| \leq d_j < y, N^j>\},$$

e per ogni $j = 1,\dots,\ell$

$$u \in \gamma_0^{(\rho)'}(R^n)\ ,\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(C\Delta_j),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n).$$

Le condizioni a) e b) del Corollario 4.6, con $\sigma = 1$ e $\rho = m/(m-1)$, sono in particolare soddisfatte se P è un polinomio di ordine m con parte principale iperbolico-ellittica. In questo caso il Corollario 4.6 fornisce un risultato che estende quello del Corollaio 3.5, poiché come è provato in [F1] ogni polinomio iperbolico-ellittico ha parte principale iperbolica-ellittica ed è di questa più debole nel senso definito in [H1].

Come è provato in [C4], la condizione b) è soddisfatta se P è un polinomio in due variabili ed N^j è un qualunque vettore non caratteristico per P. Da ciò segue che per i polinomi in due variabili oltre al Corollario 4.6 vale anche il seguente

4.7. Corollario. Sia P un polinomio su R^2 e $\sigma \geq 1$. Allora per ogni cono chiuso convesso e proprio $V \subset R^2$ esiste $\rho > \sigma$ tale che vale la (III) con $\Omega_1 = CV$, $\Omega_2 = \Omega = A = R^n$, ossia

$$u \in \gamma_0^{(\rho)'}(R^2)\ ,\ u \in \Gamma^{(\sigma)}(CV),\ P(D)u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^2) \Rightarrow u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^2).$$

Questo risultato va confrontato con quello indicato nella Osservazione 2.12.

4.8. Osservazione. In [C2] è provato che se $\sigma \geq 1$ è razionale le condizioni a) e b) del Corollario 4.6 assicurano che $P(D)\Gamma^{(\sigma)}(R^n) = \Gamma^{(\sigma)}(R^n)$. Come ho indicato nel seminario [C3] dello scorso anno, la condizione del Teorema 4.4 con σ razionale $\geqq 1$ assicura che esiste una soluzione $u \in \Gamma^{(\sigma)}(R^n)$ dell'equazione $P(D)u = f$, quando f soddisfa ad una condizione che sembra essere essenzialmente equivalente alla esistenza di una costante $c > 0$ tale che per ogni compatto K contenuto nel complementare di un cono $V = \{x \in R^n;\ |x| \leqq d \langle x,N\rangle\}$, $d > 0$,

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)| \leqq c^{|\alpha|+1}\,\Gamma(\sigma|\alpha|+1), \alpha \in Z^n_+ .$$

Questo risultato è da confrontare con quello del Teorema 4.5. e 4.9. Terminiamo ricordando che utilizzando la teoria delle iperfunzioni, T. Kawai ha provato in [K1] precisi risultati di propagazione delle singolarità analitiche delle soluzioni dell'equazione $P(D)u = 0$, quando P *ha parte principale* P_m *localmente iperbolica*, ossia quando per ogni $\xi^0 \in R^n\backslash\{0\}$ tale che $P_m(\xi^0) = 0$ esistono un intorno U_{ξ^0} di ξ^0, un vettore $N \in R^n\backslash\{0\}$ ed un $\varepsilon > 0$ tali che

$$\xi \in U_{\xi^0},\ \tau \in \mathbf{C},\ |\tau| < \varepsilon \quad P(\xi + \tau N)=0 \quad \Rightarrow \ \mathrm{Im}\,\tau = 0 .$$

E' facile vedere che ogni polinomio omogeneo di tipo principale ed a coefficienti reali è localmente iperbolico.

Ricordiamo anche che per polinomi con parte principale localmente iperbolica Hörmander ha provato in [H5] che è $P(D)\ A(R^n)=A(R^n)$ 12).

Da quanto precede ci sembra di qualche interesse esaminare le connessioni fra risultati riguardanti l'esistenza in spazi di Gevrey di soluzioni dell'equazione $P(D)u = f$ e risultati del tipo di quelli dei Corollari 4.2 e 4.6 e del Teorema 4.5.

---

12) Si veda anche [A2].

RIFERIMENTI

[A1] K.G. ANDERSSON, Propagation of analyticity of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Ark. Mat. 8 (1971), 277-302.

[A2] K.G. ANDERSSON, Global solvability of partial differential equations in the space of real analytic functions, Coll on Analysis, Rio de Janeiro 1972, Analyse fonctionelle, Hermann, 1974.

[B1] J. BOMAN, On the propagation of analyticity of solutions of differential equations with constant coefficients, Ark. Mat. 5(1964), 271-279.

[C1] L. CATTABRIGA, Some applications of Hironaka's theorem on the resolution of the singularities to the study of a fundamental solution for linear partial differential operators, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 49(1979), 49-64.

[C2] L. CATTABRIGA, Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients, Soc. Math. de France, Astérisque 89-90(1981), 129-151.

[C3] L. CATTABRIGA, Esistenza di una soluzione fondamentale con supporto singolare contenuto in un semispazio e suriettività di operatori differenziali a coefficienti costanti, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino 40(1982), 51-79.

[C4] L. CATTABRIGA, On the surjectivity of differential polynomials on Gevrey spaces, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, in corso di stampa.

[F1] J. FEHRMAN, Hybrids between hyperbolic and elliptic differential operators with constant coefficients, Ark. Mat. 13(1975), 209-235.

[G1] V.V. GRUŠIN, The extension of smoothness of solutions of differential equations of principal type, Soviet. Mat. 4(1963), 248-251.

[H1] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators. Springer 1963.

[H2] L. HÖRMANDER, On the singularities of solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 23(1970), 329-358.

[H3] L. HÖRMANDER, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math. 24(1971), 671-704.

[H4] L. HÖRMANDER, On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, Enseignément Math. 17(1971), 99-163.

[H5] L. HÖRMANDER, On the singularities of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Israel J. Math. 13 (1972), 82-105.

[H6] L. HÖRMANDER, On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients, Inventiones Math. 21(1973), 151-182.

[K1] T. KAWAI, On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations I, J. Math. Soc. Japan 24(1972), 481-517.

[L1] E. LARSSON, Generalized hyperbolicity, Ark. Mat. 7(1966), 11-32.

[M1] D. MARI, Costruzione di una soluzione fondamentale per operatori ibridi iperbolico-ellittici, appartenente ad una classe di Gevrey fuori di un cono, Boll. Un. Mat. Ital. (5), 18-B(1981), 151-175.

[S1] T. SHIROTA, On the propagation of regularity of solutions of partial differential equations with constant coefficients, Proc. J. Acad. 38(1962), 587-590.

[Z1] M. ZERNER, Solutions singulières d'équations aux dérivées partielles, Bull. Soc. Math. France 91(1963), 203-226.